第 30 講　関数総合(1)

1　m を実数とする．関数 $y=|x|(x-4)-x-m$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるような m の値の範囲を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2 次関数 $y=x^2-ax+1$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における y の最大値を M，最小値を m とする．$M-m=\frac{1}{2}$ となる a の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　a を実数の定数とする．2つの関数 $f(x)=x^2-ax+3$ と $g(x)=x^2-(2a+1)x+a^2+a$ について，次の各問いに答えよ．

(1)　すべての実数 x について，$f(x)\geqq 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ．

(2)　$g(x)\leqq 0$ を満たすすべての実数 x について，$f(x)>0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ．

[2]　2次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　この方程式が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になることを示せ．

(2)　この方程式が $0\leqq x<\dfrac{2}{3}$ に少なくとも1つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 30 講　関数総合(1)

［1］ $f(x)=x^2-2ax+a^2-2$ において，$0\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値と最小値の差が 20 となるような a の値は　$a=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

［2］ a を定数とし，$f(x)=x^2-2x+2$，$g(x)=-x^2+ax+a$ とする．$0\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対して $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は

$a\leqq -\boxed{オ}+\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第30講　関数総合(1)

1　m を実数とする．関数 $y=|x|(x-4)-x-m$ のグラフが x 軸と異なる3点で交わるような m の値の範囲を求めよ．

関数 $y=|x|(x-4)-x-m$ と x 軸との交点の個数は

方程式 $|x|(x-4)-x-m=0$ の異なる実数解の個数である．

その個数が3個になるのは，$|x|(x-4)-x=m$ より

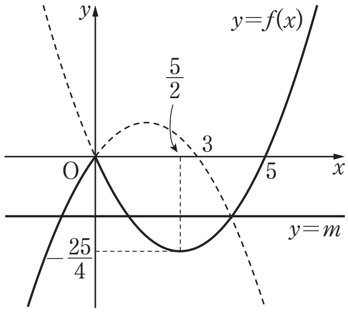
関数 $f(x)=|x|(x-4)-x$ のグラフと直線 $y=m$ とが異なる3つの交点をもつときである．

$x\geqq 0$ のとき

$$f(x)=x(x-4)-x=x^2-5x$$
$$=x(x-5)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

$x<0$ のとき

$$f(x)=-x(x-4)-x=-x^2+3x$$
$$=-x(x-3)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$



よって右図より，求める m の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{25}{4}<m<0}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　2次関数 $y=x^2-ax+1$ の区間 $0\leqq x\leqq 1$ における y の最大値を M，最小値を m とする．$M-m=\dfrac{1}{2}$ となる a の値を求めよ．

$f(x)=x^2-ax+1=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$ とおく．　軸：$x=\dfrac{a}{2}$

最大値 M について

$\dfrac{a}{2}\leqq\dfrac{1}{2}$　つまり　$a\leqq 1$ のとき　$M=f(1)=-a+2$

$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{a}{2}$　つまり　$1\leqq a$ のとき　$M=f(0)=1$

最小値 m について

$\dfrac{a}{2}\leqq 0$　つまり　$a\leqq 0$ のとき　$m=f(0)=1$

$0\leqq\dfrac{a}{2}\leqq 1$　つまり　$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$m=f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+1$

$1\leqq\dfrac{a}{2}$　つまり　$2\leqq a$ のとき　$m=f(1)=-a+2$

以上より

(i)　$a\leqq 0$ のとき　$M-m=(-a+2)-1=-a+1$

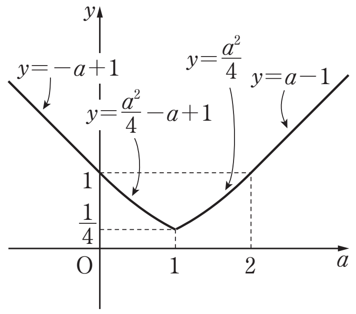
(ii)　$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$M-m=(-a+2)-\left(-\dfrac{a^2}{4}+1\right)=\dfrac{a^2}{4}-a+1$

(iii)　$1\leqq a\leqq 2$ のとき　$M-m=1-\left(-\dfrac{a^2}{4}+1\right)=\dfrac{a^2}{4}$

(iv)　$2\leqq a$ のとき　$M-m=1-(-a+2)=a-1$

よってグラフの概形より，$M-m=\dfrac{1}{2}$ となるのは

(ii)または(iii)のときである．



$\dfrac{a^2}{4}-a+1=\dfrac{1}{2}$ のとき

$a^2-4a+2=0$　$0\leqq a\leqq 1$ より　$a=2-\sqrt{2}$

$\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{1}{2}$ のとき

$a^2=2$　　$1\leqq a\leqq 2$ より　$a=\sqrt{2}$

以上より　$\boldsymbol{a=2-\sqrt{2},\ \sqrt{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 [1]　a を実数の定数とする．2 つの関数 $f(x)=x^2-ax+3$ と
$g(x)=x^2-(2a+1)x+a^2+a$ について，次の各問いに答えよ．
(1)　すべての実数 x について，$f(x)\geqq 0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ．
(2)　$g(x)\leqq 0$ を満たすすべての実数 x について，$f(x)>0$ が成り立つための条件を a を用いて表せ．

(1)　すべての x について $f(x)\geqq 0$　つまり　$x^2-ax+3\geqq 0$ が成り立つのは
方程式 $x^2-ax+3=0$ の判別式を D とすると，$D\leqq 0$ のとき
$D=a^2-4\cdot 3\leqq 0$ より　$a^2\leqq 12$　　よって　$\boldsymbol{-2\sqrt{3}\leqq a\leqq 2\sqrt{3}}$

(2)　$g(x)\leqq 0$ より　$x^2-(2a+1)x+a^2+a\leqq 0$　　$(x-a)(x-a-1)\leqq 0$
$a\leqq x\leqq a+1$
よって　$a\leqq x\leqq a+1$ における $f(x)$ の最小値が 0 より大きいときを求めればよい．

$f(x)=x^2-ax+3=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+3$　　軸：$x=\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{2}<a$　つまり　$a>0$ のとき
最小値 $f(a)=3>0$　これは成立する．よって　$a>0$

$a\leqq\dfrac{a}{2}\leqq a+1$　つまり　$-2\leqq a\leqq 0$ のとき
最小値 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+3>0$　　$a^2-12<0$　　$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$
よって　$-2\leqq a\leqq 0$

$\dfrac{a}{2}>a+1$　つまり　$a<-2$ のとき
最小値 $f(a+1)=a+4>0$　　$a>-4$　　よって　$-4<a<-2$

以上より，$\boldsymbol{a>-4}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［2］ 2 次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この方程式が実数解をもつとき，少なくとも 1 つの解は 0 以上になることを示せ．

(2) この方程式が $0 \leqq x < \frac{2}{3}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(1) 方程式 $2x^2-2ax+a=0$ ……① が実数解をもつのは，判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-2a \geqq 0 \quad a(a-2) \geqq 0 \qquad \text{つまり} \quad a \leqq 0,\ 2 \leqq a \quad \cdots\cdots②$$

のときである．

$$f(x)=2x^2-2ax+a$$
$$=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}+a$$

とおく．

$a \leqq 0$ のとき　$f(0) \leqq 0$

$a \geqq 2$ のとき　軸　$x=\frac{a}{2} \geqq 1$

いずれの場合も，関数 $y=2x^2-2ax+a$ のグラフは，

x 軸と $x \geqq 0$ の部分で少なくとも 1 つの共有点をもつ．

よって，①が実数解をもつとき，少なくとも 1 つの解は 0 以上となる．

(2) ①が実数解をもつためには，(1)より $a \leqq 0$，$2 \leqq a$ であることが必要である．

$a \leqq 0$ のとき　　$f(0) \leqq 0$ より

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}-\frac{a}{3}>0$　つまり　$a<\frac{8}{3}$ であればよい．

よって　$a \leqq 0$

$a \geqq 2$ のとき　　軸　$x=\frac{a}{2} \geqq 1 > \frac{2}{3}$　　$f(0)=a>0$ より

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}-\frac{a}{3}<0$　つまり　$a>\frac{8}{3}$ であればよい．

これは $a \geqq 2$ を満たす．　よって　$a>\frac{8}{3}$

以上より　$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \frac{8}{3}<a}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第30講　関数総合(1)

[1]　$f(x)=x^2-2ax+a^2-2$ において，$0\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値と最小値の差が 20 となるような a の値は　$a=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である．

[2]　a を定数とし，$f(x)=x^2-2x+2$，$g(x)=-x^2+ax+a$ とする．$0\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対して $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つような a の値の範囲は $a\leqq -\boxed{オ}+\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}$ である．

解答例

[1]　$f(x)=x^2-2ax+a^2-2=(x-a)^2-2$　　よって　$0\leqq x\leqq 4$ における

$f(x)$ の最小値は　$a<0$ のとき　　$f(0)=a^2-2$
　　$0\leqq a\leqq 4$ のとき　$f(a)=-2$
　　$4<a$ のとき　　$f(4)=a^2-8a+14$

$f(x)$ の最大値は　$a\leqq 2$ のとき　$f(4)=a^2-8a+14$
　　$2\leqq a$ のとき　$f(0)=a^2-2$

よって

$a<0$ のとき　$a^2-8a+14-(a^2-2)=20$　より　$a=-\dfrac{1}{2}$　これは $a<0$ を満たす

$0\leqq a\leqq 2$ のとき　$a^2-8a+14-(-2)=20$　　$a=4\pm 2\sqrt{5}$　これらはともに不適

$2\leqq a\leqq 4$ のとき　$a^2-2-(-2)=20$　　$a=\pm 2\sqrt{5}$　これらはともに不適

$4<a$ のとき　$a^2-2-(a^2-8a+14)=20$　　$a=\dfrac{9}{2}$　これは $4<a$ を満たす

以上より　$a=-\mathbf{\dfrac{1}{2}}$，$\mathbf{\dfrac{9}{2}}$

[2]　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で $f(x)\geqq g(x)$ つまり $2x^2-(a+2)x+2-a\geqq 0$ が常に成り立つのは，

$h(x)=2x^2-(a+2)x+2-a=2\left(x-\dfrac{a+2}{4}\right)^2-\dfrac{a^2+12a-12}{8}$ とおくと，

$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最小値が 0 以上になるときである．

$\dfrac{a+2}{4}\leqq 0$　つまり　$a\leqq -2$ のとき　$h(0)=2-a\geqq 0$　より　$a\leqq 2$　　よって　$a\leqq -2$

$0<\dfrac{a+2}{4}<1$　つまり　$-2<a<2$ のとき　$-\dfrac{a^2+12a-12}{8}\geqq 0$

　$a^2+12a-12\leqq 0$　$-6-4\sqrt{3}\leqq a\leqq -6+4\sqrt{3}$　　よって　$-2<a\leqq -6+4\sqrt{3}$

$1\leqq\dfrac{a+2}{4}$　つまり　$a\geqq 2$ のとき　$h(1)=2-2a\geqq 0$　　$a\leqq 1$

よって　$a\geqq 2$ を満たさず不適.

以上より　求める a の値は　$a\leqq -2$，$-2<a\leqq -6+4\sqrt{3}$　より　$a\leqq \mathbf{-6+4\sqrt{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。